

具有扩散项的最简沉积物模型的 Turing-Hopf 分支分析*

王晶晶

西安财经大学数学学院, 陕西 西安 710100

摘要: 提出了一类带有扩散项的最简沉积物模型. 首先研究了模型 Turing-Hopf 分支现象的存在性; 其次给出了模型在 Turing-Hopf 分支点处的规范型; 最后利用数值结果分析了模型的动力学行为. 研究表明, 在 Turing-Hopf 分支点附近, 模型呈现出丰富的时空动力学行为, 包括空间齐次周期解、空间非齐次周期解以及空间非齐次平衡态解.

关键词: 最简沉积物模型; Turing-Hopf 分支; 规范型; 时空动力学

中图分类号: O157.2 **文献标志码:** A **文章编号:** 2097-0137(XXXX)XX-0001-09

Turing-Hopf bifurcation analysis of a minimal sediment model with diffusion

Wang Jingjing

School of Mathematics, Xi'an University of Finance and Economics, Xi'an 710100, China

Abstract: A minimal sediment model with diffusion is proposed. Firstly, the existence of Turing-Hopf bifurcation for the model is investigated; Secondly, the normal form of model at the Turing-Hopf bifurcation point is derived; Finally, the dynamics of model are analyzed by means of numerical results. The research indicates that near the Turing-Hopf bifurcation point, the model exhibits rich spatiotemporal dynamics, including the spatially homogeneous periodic solutions, spatially inhomogeneous periodic solutions and spatially inhomogeneous steady-state solutions.

Key words: minimal sediment model; Turing-Hopf bifurcation; normal form; spatiotemporal dynamics

海洋中的营养盐主要包括碳、氮、磷、硅、氧、铁等元素, 这些物质在海洋中的分布与变化, 不仅与其来源、水团输运、沉积物堆积、矿化作用等过程相关, 还与海洋中的细菌、浮游植物、浮游动物、鱼类等生物密切相关. 海洋沉积物是指在海洋环境中沉降于海底的物质, 主要包括陆源沉积物、生物源沉积物、化学/自生沉积物、火山源沉积物以及宇宙物质. 由此可见, 海洋沉积物是一个兼具生物、化学、物理多重作用的复杂庞大生态系统. 数学模型是探究自然界不同物种或物质间相互作用的重要工具. 大量实验与研究表明, 通过构建相应数学模型, 能够分析各类物种与物质的动态变化规律. 因此, 近几十年来, 学者们建立了众多数学模型, 用以刻画复杂生物现象与自然现象的本质动力学特征 (Kovács, 2004; Yi et al., 2017; Jia et al., 2018; Wang et al., 2021; 2024). 基于此, 为深入探究海洋沉积物生态系统, 构建合理的数学模型并开展动力学分析具有重

* 收稿日期: 2026-01-07 录用日期: 2026-05-27 网络首发日期: XXXX-XX-XX

基金项目: 国家自然科学基金 (12461097)

作者简介: 王晶晶 (1993 年生), 女; 研究方向: 反应扩散系统与斑图动力学; E-mail: jjwang@xaufe.edu.cn



ZR20260006

要的理论与现实研究意义.

由于海洋沉积物中存在种类繁杂的微生物与化学物质,为聚焦阐释沉积物系统的典型动力学特征,Baurmann et al.(2004)选取了一类简化的捕食-食饵模型作为原型模型开展研究,而非对沉积物中复杂的全域环境与过程进行完整建模(即仅考虑以单一营养物为食的单一种群细菌),模型的具体形式为

$$\begin{cases} \frac{dB}{d\tau} = B \left(\alpha \frac{BN}{B+L} - m \right), \\ \frac{dN}{d\tau} = \phi (\hat{N} - N) - \beta \frac{B}{B+L} BN, \end{cases} \quad (1)$$

其中 B 和 N 分别表示细菌与营养物的生物量, α 为细菌生物量转化率, L 为半饱和常数, m 为细菌死亡率, β 为捕食率, ϕ 为沉积物与海水间的水力传导系数, $\hat{N}$ 为海水中的营养盐含量, $\frac{B}{B+L}$ 是描述饱和和增长过程的经典 Monod 型函数, 在模型(1)中表示细菌的生物量不可能超过总种群密度.

模型(1)也被称为最简沉积物模型(简称 MS 模型). 为了方便讨论,下面对模型(1)进行无量纲化. 令 $N = \frac{m}{\alpha} v$, $\hat{N} = \frac{m}{\alpha} c$, $B = \frac{\phi}{\beta} u$, $L = \frac{\phi}{\beta} b$, $\tau = \frac{1}{\phi} t$, $a = \frac{m}{\phi}$, 则模型(1)简化为

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = au \left(\frac{uv}{u+b} - 1 \right), \\ \frac{dv}{dt} = c - v - \frac{u^2 v}{u+b}, \end{cases} \quad (2)$$

其中 u 和 v 分别表示细菌与营养物的生物量, b 为半饱和常数, a 为营养物向细菌生物量的转化效率, c 为沉积物与海水之间的水力传导系数.

模型(2)是一个常微分方程(ODE)模型,生物意义上表示沉积物中的物质在空间中的分布是均匀的. 然而,事实上,物质在沉积物内部及界面是不断发生迁移的. 为了更真实地反映沉积物生态系统的物质循环与生物活动,现将扩散项引入到模型(2)中,则模型(2)可转化为如下反应扩散方程(PDE)模型:

$$\begin{cases} \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \sigma_1 \Delta u(x,t) + au(x,t) \left(\frac{u(x,t)v(x,t)}{u(x,t)+b} - 1 \right), & x \in (0, \pi), t > 0, \\ \frac{\partial v(x,t)}{\partial t} = \sigma_2 \Delta v(x,t) + c - v(x,t) - \frac{u^2(x,t)v(x,t)}{u(x,t)+b}, & x \in (0, \pi), t > 0, \\ \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} = \frac{\partial v(x,t)}{\partial x} = 0, & x = 0, \pi, t \geq 0, \\ u(x,0) = u_0(x) \geq 0, \neq 0, v(x,0) = v_0(x) \geq 0, \neq 0, & x \in [0, \pi], \end{cases} \quad (3)$$

其中 $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2}$, σ_1 和 σ_2 分别为细菌及其营养物的扩散率, 齐次 Neumann 边界条件表示沉积物表面不存在细菌及其营养物的通量交换, $u_0(x)$ 和 $v_0(x)$ 为区间 $[0, \pi]$ 内的连续函数.

近年来,已有诸多学者从不同角度对模型(3)进行了研究,并得到了该模型丰富的动力学行为. 例如, Baurmann et al.(2004)研究了模型(3)的 Turing 稳定性, Cao et al.(2019a, 2019b)研究了模型(3)的 Hopf 分支解、平衡态分支解及非常数正解的存在性,并验证了上述动力学行为可诱导模型产生时间斑图与空间斑图. 众所周知,反应扩散模型中常见的斑图类型包括空间斑图、时间斑图及时空斑图,其形成机制主要归结为以下 4 种: Turing 不稳定性(Kovács, 2004; Yi et al., 2017; Wang et al., 2024)、Hopf 分支(Jia et al., 2018; Wang et al., 2021; Jia et al., 2025)、Turing-Hopf 分支(Song et al., 2016; Xu et al., 2018; Jiang et al., 2020; Xing et al., 2024; Wu et al., 2026)以及非常数正解的存在性(李海侠, 2017; 王晶晶等, 2017; 罗丽琴等, 2025). 基于上述研究背景,我们感兴趣的问题是:除了文献(Baurmann et al., 2004; Cao et al., 2019a; 2019b)中的研究结果,模型(3)是否还能产生其它动力学行为与斑图模式,如: Turing-Hopf 分支与时空斑图.

为了回答上述问题,本文在 Baurmann et al.(2004)和 Cao et al.(2019a; 2019b)的基础上进一步研究模型(3)的 Turing-Hopf 分支现象及其产生的时空斑图. 通过研究,我们发现在 $\left[\sqrt{x^*} \right] > k_0^*$ 的情况下,存在临界值

$(\sigma_{k_1}^*, a_0)$, 使得当 $(\sigma_1, a) = (\sigma_{k_1}^*, a_0)$ 时, 模型(3)在正平衡点 U_1^* 处会发生模- $(k_1^*, 0)$ Turing-Hopf 分支现象; 在 $\left\lfloor \sqrt{x^*} \right\rfloor < k_0^*$ 的情况下, 存在临界值 $(\sigma_{k_2}^*, a_0)$, 使得当 $(\sigma_1, a) = (\sigma_{k_2}^*, a_0)$ 时, 模型(3)在正平衡点 U_1^* 处会发生模- $(k_2^*, 0)$ Turing-Hopf 分支现象 (见定理 1), 其中 $U_1^*, x^*, k_0^*, k_1^*, k_2^*$ 如 1.1 节中定义. 此外, 数值结果验证了在一定的参数值下, 模型(3)可以产生时空斑图 (见命题 1). 通过与 Baurmann et al. (2004), Cao et al. (2019a; 2019b) 中的研究比较发现, Turing-Hopf 分支现象的研究比单独的 Turing 不稳定性或 Hopf 分支或平衡态分支或非常数正解的存在性的研究更复杂.

1 Turing-Hopf 分支

本节首先研究模型(3) Turing-Hopf 分支现象的存在性, 然后采用与 Jiang et al. (2020) 相近的方法计算 Turing-Hopf 分支对应的规范型.

1.1 Turing-Hopf 分支的存在性

简单计算可得, 如果 $c > 1 + 2\sqrt{b}$, 则模型(3)存在正平衡点 $U_1^* = (u_1^*, v_1^*)$ 和 $U_2^* = (u_2^*, v_2^*)$; 如果 $c = 1 + 2\sqrt{b}$, 则模型(3)存在正平衡点 $U_3^* = (u_3^*, v_3^*)$, 其中

$$u_1^* = \frac{1}{2} \left(c - 1 + \sqrt{(1-c)^2 - 4b} \right), \quad u_2^* = \frac{1}{2} \left(c - 1 - \sqrt{(1-c)^2 - 4b} \right), \quad u_3^* = \sqrt{b},$$

$$v_i^* = \frac{u_i^* + b}{u_i^*}, \quad i = 1, 2, \quad v_3^* = 1 + \sqrt{b}.$$

本小节研究模型(3)在平衡点 U_1^* 处产生的 Turing-Hopf 分支现象. 这里, 我们假设 U_1^* 存在的条件 $c > 1 + 2\sqrt{b}$ 始终成立, 且记 $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$ 和 $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$ 分别表示正整数集和非负整数集.

设 $U = (u, v)^T$, 则模型(3)在平衡点 U_1^* 处的线性化方程为

$$U_t = \sigma(\sigma_1, a) \Delta U + L(\sigma_1, a) U, \quad (4)$$

其中

$$\sigma(\sigma_1, a) \Delta = \begin{pmatrix} \sigma_1 \Delta & 0 \\ 0 & \sigma_2 \Delta \end{pmatrix}, \quad L(\sigma_1, a) = \begin{pmatrix} \frac{ab}{u_1^* + b} & \frac{au_1^{*2}}{u_1^* + b} \\ -2 + \frac{u_1^*}{u_1^* + b} & -1 - \frac{u_1^{*2}}{u_1^* + b} \end{pmatrix}.$$

众所周知, 算子 $-\Delta$ 在空间 $X = \{(u, v) \in W^{2,2}(0, \pi) : u_x = v_x = 0 \text{ at } x = 0, \pi\}$ 上的特征值和标准化特征函数为

$$\mu_0 = 0, \quad \beta_0 = \frac{1}{\sqrt{\pi}}, \quad \mu_k = k^2, \quad \beta_k = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos kx, \quad k \in \mathbb{N}_0.$$

方程(4)的特征方程为

$$D_k(\mu) = \mu^2 - T_k(\sigma_1, a) \mu + J_k(\sigma_1, a) = 0, \quad k \in \mathbb{N}_0, \quad (5)$$

其中

$$T_k(\sigma_1, a) = -(\sigma_1 + \sigma_2)k^2 + \frac{(a-1)b - u_1^{*2} - u_1^*}{u_1^* + b},$$

$$J_k(\sigma_1, a) = \sigma_1 \sigma_2 k^4 + \frac{\sigma_1(u_1^{*2} + u_1^* + b) - \sigma_2 ab}{u_1^* + b} k^2 + \frac{a(u_1^{*2} - b)}{u_1^* + b}. \quad (6)$$

首先分析模型(3)产生的 Hopf 分支现象. 假设 $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$, 由于 $c > 1 + 2\sqrt{b}$, 所以 $J_0 > 0$. 令 $a_0 = \frac{u_1^{*2} + u_1^* + b}{b}$, 则通过计算可得, 当 $0 < a < a_0$ 时, U_1^* 是局部渐近稳定的, 当 $a > a_0$ 时, U_1^* 是不稳定的, 且 $D_0(\mu) = 0$ 有一对纯虚数根 $\pm \sqrt{J_0} i$ 当且仅当 $a = a_0$. 记该临界条件在 σ_1 - a 平面中为 $\mathcal{A}_0$, 即 $\mathcal{A}_0 : a = a_0$. 进一步可得横截条件 $\left. \frac{d(\operatorname{Re} \mu)}{da} \right|_{a=a_0} = \frac{b}{2(u_1^* + b)} \neq 0$ 成立, 则由 Jiang et al. (2020) 中模-0 Hopf 分支的定义知, 模型

(3) 在 $a = a_0$ 处会发生模-0 Hopf 分支现象, 且 $\mathcal{A}_0$ 是模-0 Hopf 分支曲线.

下面分析模型(3)产生的 Turing 分支现象. 假设 $\sigma_1, \sigma_2 > 0$, 由式(6)可知, 对任意 $k \in \mathbb{N}, J_k = 0$ 等价于

$$a = a_k(\sigma_1) = \frac{\sigma_2(u_1^* + b)k^4 + a_0bk^2}{\sigma_2bk^2 + b - u_1^{*2}}\sigma_1. \quad (7)$$

令 $k_0^* = \left\lfloor \sqrt{(u_1^{*2} - b)/(\sigma_2b)} \right\rfloor$, 其中 $\lfloor \cdot \rfloor$ 为取整函数. 直接计算可得, 当 $k > k_0^*$ 时, $a_k(\sigma_1) > 0$. 因此, 当 $a = a_k(\sigma_1) < a_0$ 且 $k > k_0^*$ 时, $D_k(\mu) = 0$ 有一个零根和一个负根. 进一步计算可得, 当 $k > k_0^*$ 时, 横截条件

$$\left. \frac{d(\operatorname{Re} \mu)}{da} \right|_{a=a_k(\sigma_1)} = \frac{b}{2(u_1^* + b)} > 0$$

成立, 则由 Jiang et al. (2020) 中模- k Turing 分支的定义知, 模型(3)在 $a = a_k(\sigma_1) < a_0$ 且 $k > k_0^*$ 时会产生模- k Turing 分支现象. 此外, 容易得到模- k Turing 分支曲线 $\mathcal{L}_k$ 由一系列线段 $\mathcal{L}_k: a = a_k(\sigma_1), k > k_0^*$ 构成.

接下来分析模型(3)产生的 Turing-Hopf 分支现象.

由于当 $k > k_0^*$ 时, $\frac{d(a_k(\sigma_1))}{d\sigma_1} = \frac{\sigma_2(u_1^* + b)k^4 + a_0bk^2}{\sigma_2bk^2 + b - u_1^{*2}} > 0$ 成立, 所以在平面 σ_1 - a 内, 曲线 $\mathcal{L}_k$ 的斜率为正.

结合 $\lim_{\sigma_1 \rightarrow 0} a_k(\sigma_1) = 0$ 和 $k > k_0^*$ 可得, $\mathcal{A}_0$ 和 $\mathcal{L}_k$ 必定在 σ_1 - a 平面的第一象限内存在唯一交点. 将 $a = a_0$ 代入式(7)中有

$$\sigma_k^* = \frac{a_0(\sigma_2bk^2 + b - u_1^{*2})}{\sigma_2(u_1^* + b)k^4 + a_0bk^2}, \quad k > k_0^*,$$

则 $\mathcal{A}_0$ 和 $\mathcal{L}_k$ 的唯一交点为 (σ_k^*, a_0) .

令 $\tilde{f}(x) = \frac{a_0(\sigma_2bx + b - u_1^{*2})}{\sigma_2(u_1^* + b)x^2 + a_0bx}$, $x > 0$, 则

$$\frac{d\tilde{f}(x)}{dx} = \frac{-a_0b\sigma_2^2(u_1^* + b)x^2 - 2a_0\sigma_2(b - u_1^{*2})(u_1^* + b)x - a_0^2b(b - u_1^{*2})}{(\sigma_2(u_1^* + b)x^2 + a_0bx)^2}.$$

容易观察到, 函数 $\tilde{f}(x)$ 在区间 $(0, x^*)$ 上单调递增, 在区间 $(x^*, +\infty)$ 上单调递减, 其中

$$x^* = \frac{(u_1^{*2} - b)(u_1^* + b) + \sqrt{(b - u_1^{*2})^2(u_1^* + b)^2 + a_0b^2(u_1^* + b)(u_1^{*2} - b)}}{b\sigma_2(u_1^* + b)}.$$

进一步分析可得到, $\tilde{f}(x)$ 在区间 $[k_0^{*2}, +\infty)$ 内是正的, 且函数 $\tilde{f}(x)$ 关于 x 的单调性与 σ_k^* 关于 k^2 的单调性完全一致. 接下来, 我们分两种情形讨论 σ_k^* 的最大值.

情形 1 $\lfloor \sqrt{x^*} \rfloor > k_0^*$. 在这种情形下, σ_k^* 在区间 $[k_0^*, \lfloor \sqrt{x^*} \rfloor]$ 内关于 k 是单调递增的, 在区间 $[\lfloor \sqrt{x^*} \rfloor + 1, +\infty)$

内关于 k 是单调递减的. 定义

$$k_1^* = \begin{cases} \lfloor \sqrt{x^*} \rfloor, & \sigma_{\lfloor \sqrt{x^*} \rfloor}^* > \sigma_{\lfloor \sqrt{x^*} \rfloor + 1}^*, \\ \lfloor \sqrt{x^*} \rfloor + 1, & \sigma_{\lfloor \sqrt{x^*} \rfloor}^* \leq \sigma_{\lfloor \sqrt{x^*} \rfloor + 1}^*, \end{cases}$$

则 σ_k^* 在 $k = k_1^*$ 时取得最大值.

情形 2 $\lfloor \sqrt{x^*} \rfloor < k_0^*$. 在这种情形下, σ_k^* 在区间 $[k_0^* + 1, +\infty)$ 内关于 k 是单调递减的. 定义

$$k_2^* = \begin{cases} k_0^*, & \sigma_{k_0^*}^* > \sigma_{k_0^* + 1}^*, \\ k_0^* + 1, & \sigma_{k_0^*}^* \leq \sigma_{k_0^* + 1}^*. \end{cases}$$

则 σ_k^* 在 $k = k_2^*$ 时取得最大值.

综上所述可得, 当 $\left\lfloor \sqrt{x^*} \right\rfloor > k_0^*$ 时, Hopf 分支曲线 $\mathcal{A}_0$ 与 Turing 分支曲线 $\mathcal{L}_k$ 相交于点 $(\sigma_{k_1}^*, a_0)$, 当 $\left\lfloor \sqrt{x^*} \right\rfloor < k_0^*$ 时, 二者相交于点 $(\sigma_{k_2}^*, a_0)$. 进一步分析可得到, 特征方程 (5) 除了在 $k = k_1^*$ 或 $k = k_2^*$ 处存在一个单重零根, 以及在 $k = 0$ 处存在一对单重纯虚根外, 其余所有根的实部均为负, 同时, Hopf 分支与 Turing 分支的横截条件均满足. 因此, 由 Jiang et al. (2020) 中模- $(k, 0)$ Turing-Hopf 分支的定义知, $(\sigma_{k_1}^*, a_0)$ 和 $(\sigma_{k_2}^*, a_0)$ 为模型 (3) 的 Turing-Hopf 分支点, 且当 $(\sigma_1, a) = (\sigma_{k_1}^*, a_0)$ 和 $(\sigma_1, a) = (\sigma_{k_2}^*, a_0)$ 时, 模型 (3) 在正平衡点 U_1^* 处分别会发生模- $(k_1^*, 0)$ 和模- $(k_2^*, 0)$ Turing-Hopf 分支现象.

总结上述结论可得到如下定理.

定理 1 假设 $c > 1 + 2\sqrt{b}$, 则

- (i) 当 $a = a_0$ 时, 模型 (3) 在正平衡点 U_1^* 处会发生模-0 Hopf 分支现象;
- (ii) 若 $a_k(\sigma_1) < a_0$ 且 $k > k_0^*$, 则当 $a = a_k(\sigma_1)$ 时, 模型 (3) 在正平衡点 U_1^* 处会发生模- k Turing 分支现象;
- (iii) 若 $\left\lfloor \sqrt{x^*} \right\rfloor > k_0^*$, 则当 $(\sigma_1, a) = (\sigma_{k_1}^*, a_0)$ 时, 模型 (3) 在正平衡点 U_1^* 处会发生模- $(k_1^*, 0)$ Turing-Hopf 分支现象; 若 $\left\lfloor \sqrt{x^*} \right\rfloor < k_0^*$, 则当 $(\sigma_1, a) = (\sigma_{k_2}^*, a_0)$ 时, 模型 (3) 在正平衡点 U_1^* 处会发生模- $(k_2^*, 0)$ Turing-Hopf 分支现象.

注 1 定理 1 说明了存在临界值 $(\sigma_{k_1}^*, a_0)$ 和 $(\sigma_{k_2}^*, a_0)$, 使得在一定条件下, 模型 (3) 在正平衡点 U_1^* 处会发生 Turing-Hopf 分支现象. 生物学上, 该结果解释了海洋沉积物中细菌与营养物质的动态时空异质性, 这种异质性是由细菌和营养物互相作用与扩散差异驱动的自组织结果, 而非外部环境差异所致.

1.2 Turing-Hopf 分支的规范型

本小节采用与 Jiang et al. (2020) 类似的方法计算模型 (3) 在正平衡点 U_1^* 处产生的模- $(k_1^*, 0)$ Turing-Hopf 分支的规范型.

引入新的参数 $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{R}^2$. 令 $\sigma_1 = \sigma_{k_1}^* + \alpha_1, a = a_0 + \alpha_2$, 则容易观察到 $\alpha = (0, 0)$ 是模型 (3) 的一个 Turing-Hopf 分支点. 设 $\tilde{u} = u - u_1^*, \tilde{v} = v - v_1^*$, 将其代入模型 (3) 中, 并省略波浪号标记可得, 在抽象空间 $\mathcal{C} = C(\mathbb{R}, X)$ 中, 模型 (3) 可表示为如下形式:

$$U_t = \mathcal{G}U + F(U, \alpha), \quad (8)$$

其中 $\mathcal{G} = \sigma(0)\Delta U + L(0)(U)$, $F(U, \alpha) = (L(\alpha) - L(0))U + (\sigma(\alpha) - \sigma(0))\Delta U + G(U, \alpha)$,

$$\begin{aligned} \sigma(0) = \sigma_0 = \sigma(\sigma_{k_1}^*, a_0) &= \begin{pmatrix} \sigma_{k_1}^* & 0 \\ 0 & \sigma_2 \end{pmatrix}, \quad L(0) = L_0 = L(\sigma_{k_1}^*, a_0) = \begin{pmatrix} \frac{a_0 b}{u_1^* + b} & \frac{a_0 u_1^{*2}}{u_1^* + b} \\ -2 + \frac{u_1^*}{u_1^* + b} & -\frac{a_0 b}{u_1^* + b} \end{pmatrix}, \\ \sigma(\alpha) = \sigma(\sigma_{k_1}^* + \alpha_1, a_0 + \alpha_2) &= \begin{pmatrix} \sigma_{k_1}^* + \alpha_1 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \end{pmatrix}, \quad L(\alpha) = L(\sigma_{k_1}^* + \alpha_1, a_0 + \alpha_2) = \begin{pmatrix} \frac{(a_0 + \alpha_2)b}{u_1^* + b} & \frac{(a_0 + \alpha_2)u_1^{*2}}{u_1^* + b} \\ -2 + \frac{u_1^*}{u_1^* + b} & -\frac{a_0 b}{u_1^* + b} \end{pmatrix}, \\ G(U, \alpha) &= \begin{pmatrix} (a_0 + \alpha_2)(u + u_1^*) \left(\frac{(u + u_1^*)(v + v_1^*)}{u + u_1^* + b} - 1 \right) - \frac{(a_0 + \alpha_2)b}{u_1^* + b}u - \frac{(a_0 + \alpha_2)u_1^{*2}}{u_1^* + b}v \\ c - (v + v_1^*) - \frac{(u + u_1^*)^2(v + v_1^*)}{u + u_1^* + b} + \left(2 - \frac{u_1^*}{u_1^* + b} \right)u + \frac{a_0 b}{u_1^* + b}v \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

将算子 $\sigma(\alpha), L(\alpha)$ 及 $F(U, \alpha)$ 在 $\alpha = 0$ 处进行泰勒展开, 则式 (8) 可转化为

$$U_t = \sigma_0 \Delta U + L_0(U) + \frac{1}{2} \sigma_1(\alpha) \Delta U + \frac{1}{2} L_1(\alpha)(U) + \frac{1}{2!} Q(U, U) + \frac{1}{3!} C(U, U, U) + \cdots, \quad U \in \mathcal{C},$$

其中

$$\sigma_1(\alpha) = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad L_1(\alpha) = \begin{pmatrix} \frac{b\alpha_2}{u_1^* + b} & \frac{u_1^{*2}\alpha_2}{u_1^* + b} \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$Q(\varphi, \varphi) = \begin{pmatrix} \frac{2a_0b^2v_1^*}{(u_1^* + b)^3}\varphi_1^2 + \frac{2au_1^*(u_1^* + 2b)}{(u_1^* + b)^2}\varphi_1\varphi_2 \\ \frac{-2b^2v_1^*}{(u_1^* + b)^3}\varphi_1^2 - \frac{2u_1^{*2} + 4bu_1^*}{(u_1^* + b)^2}\varphi_1\varphi_2 \end{pmatrix}, \quad C(\varphi, \varphi, \varphi) = \begin{pmatrix} \frac{-6a_0b^2v_1^*}{(u_1^* + b)^4}\varphi_1^3 + \frac{6ab^2}{(u_1^* + b)^3}\varphi_1^2\varphi_2 \\ \frac{6b^2v_1^*}{(u_1^* + b)^4}\varphi_1^3 - \frac{6b^2}{(u_1^* + b)^3}\varphi_1^2\varphi_2 \end{pmatrix},$$

这里 $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)^\top$, $Q(\varphi, \varphi)$ 和 $C(\varphi, \varphi, \varphi)$ 分别为 $F(\varphi, \alpha)$ 在 $\alpha = 0$ 处关于 φ 的二阶和三阶 Fréchet 导数. 为了方便, 我们将 $Q(x, y)$ 记为 Q_{xy} , $C(x, y, r)$ 记为 C_{xyr} .

注意到, 式(8)的特征矩阵为

$$\mathcal{M}_k(\mu) = \begin{pmatrix} \mu + \sigma_{k_1}^* k^2 - \frac{a_0 b}{u_1^* + b} & -\frac{a_0 u_1^{*2}}{u_1^* + b} \\ 2 - \frac{u_1^*}{u_1^* + b} & \mu + \sigma_2 k^2 + \frac{a_0 b}{u_1^* + b} \end{pmatrix}.$$

由 1.1 节中的讨论可知, $\mu = \pm i\omega_0$ 是 $\mathcal{M}_0(\mu)$ 的特征值, 其中 $\omega_0 = \sqrt{a_0(u_1^{*2} - b)/(u_1^* + b)}$, $\mu = 0$ 是 $\mathcal{M}_{k_1}(\mu)$ 的一个单重特征值. 因此, 相应于特征值 $\mu = \pm i\omega_0$ 和 $\mu = 0$ 的特征向量及其对偶特征向量分别为

$$\Phi_{k_1} = \xi_{k_1}, \quad \Psi_{k_1} = \eta_{k_1}^\top, \quad \Phi_0 = (\xi_0, \bar{\xi}_0), \quad \Psi_0 = (\eta_0^\top, \bar{\eta}_0^\top),$$

其中

$$\xi_{k_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\sigma_{k_1}^* k_1^2 (u_1^* + b) - a_0 b}{a_0 u_1^{*2}} \end{pmatrix}, \quad \eta_{k_1} = \begin{pmatrix} \frac{b\sigma_2 k_1^{*2} - \sigma_{k_1}^* k_1^{*2} u_1^* + a_0 b}{bk_1^{*2}(\sigma_{k_1}^* + \sigma_2)} \\ \frac{a_0 u_1^{*2}}{bk_1^{*2}(\sigma_{k_1}^* + \sigma_2)} \end{pmatrix},$$

$$\xi_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{i\sqrt{a_0(u_1^{*2} - b)(u_1^* + b)} - a_0 b}{a_0 u_1^{*2}} \end{pmatrix}, \quad \eta_0 = \frac{1}{2\sqrt{a_0(u_1^{*2} - b)(u_1^* + b)}} \begin{pmatrix} \sqrt{a_0(u_1^{*2} - b)(u_1^* + b)} - a_0 b i \\ -a_0 u_1^{*2} i \end{pmatrix}.$$

由 Jiang et al. (2020) 可知, 在 Turing-Hopf 分支点处, 模型(3)在中心流形上的三阶规范型为

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = \alpha_1(\alpha) z_1 + a_{200} z_1^2 + a_{011} z_1 z_2 + a_{300} z_1^3 + a_{111} z_1 z_2 \bar{z}_2 + \cdots, \\ \dot{z}_2 = i\omega_0 z_2 + \mathfrak{b}_2(\alpha) z_2 + b_{110} z_1 z_2 + b_{210} z_1^2 z_2 + b_{021} z_2^2 \bar{z}_2 + \cdots, \\ \dot{\bar{z}}_2 = -i\omega_0 \bar{z}_2 + \overline{\mathfrak{b}_2(\alpha)} \bar{z}_2 + \overline{b_{110}} z_1 \bar{z}_2 + \overline{b_{210}} z_1^2 \bar{z}_2 + \overline{b_{021}} z_2 \bar{z}_2^2 + \cdots, \end{cases} \quad (9)$$

其中规范型(9)中的各项系数可通过下述公式直接计算得到

$$\begin{aligned} \alpha_1(\alpha) &= \frac{1}{2} \eta_{k_1}^* (L_1(\alpha) \xi_{k_1} - k_1^{*2} \sigma_1(\alpha) \xi_{k_1}), \quad a_{200} = a_{011} = b_{110} = 0, \quad \mathfrak{b}_2(\alpha) = \frac{1}{2} \eta_0 L_1(\alpha) \xi_0, \\ a_{300} &= \frac{1}{4} \eta_{k_1}^* C_{\xi_{k_1} \xi_{k_1} \xi_{k_1}} + \frac{1}{\omega_0} \operatorname{Re} \left(i Q_{\xi_{k_1} \xi_{k_1}} \xi_0 \right) Q_{\xi_{k_1} \xi_{k_1}} + \xi_{k_1}^* Q_{\xi_{k_1}} \left(\mathfrak{h}_{200}^0 + \frac{1}{\sqrt{2}} \mathfrak{h}_{200}^{2k_1^*} \right), \\ a_{111} &= \eta_{k_1}^* C_{\xi_{k_1} \xi_0 \xi_0} + \frac{2}{\omega_0} \operatorname{Re} \left(i Q_{\xi_{k_1} \xi_0} \eta_0 \right) Q_{\xi_0 \xi_0} + \xi_{k_1}^* \left(Q_{\xi_{k_1}} \left(\mathfrak{h}_{011}^0 + \frac{1}{\sqrt{2}} \mathfrak{h}_{011}^{2k_1^*} \right) + Q_{\xi_0} \mathfrak{h}_{101}^{k_1^*} + Q_{\xi_0} \mathfrak{h}_{110}^{k_1^*} \right), \\ b_{210} &= \frac{1}{2} \eta_0 C_{\xi_{k_1} \xi_{k_1} \xi_0} + \frac{1}{2i\omega_0} \eta_0 \left(2Q_{\xi_{k_1} \xi_{k_1}} \eta_{k_1}^* Q_{\xi_{k_1} \xi_0} + (-Q_{\xi_0 \xi_0} \eta_0 + Q_{\xi_0 \xi_0} \bar{\eta}_0) Q_{\xi_{k_1} \xi_{k_1}} \right) + \eta_0 \left(Q_{\xi_{k_1}} \mathfrak{h}_{110}^{k_1^*} + Q_{\xi_0} \mathfrak{h}_{200}^0 \right), \\ b_{021} &= \frac{1}{2} \eta_0 C_{\xi_{k_1} \xi_{k_1} \xi_0} + \frac{1}{4i\omega_0} \eta_0 \left(\frac{2}{3} Q_{\xi_0 \xi_0} \bar{\eta}_0 Q_{\xi_0 \xi_0} + (-2Q_{\xi_0 \xi_0} \eta_0 + 4Q_{\xi_0 \xi_0} \bar{\eta}_0) Q_{\xi_0 \xi_0} \right) + \eta_0 \left(Q_{\xi_0} \mathfrak{h}_{011}^0 + Q_{\xi_0} \mathfrak{h}_{020}^0 \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{h}_{200}^0 &= -\frac{1}{2} \left(L_0(\mathbf{h}_{200}) + \sigma_0 \Delta \mathbf{h}_{200} \right)^{-1} Q_{\xi_i, \xi_{k_i}} + \frac{1}{2i\omega_0} (\xi_0 \boldsymbol{\eta}_0 - \bar{\xi}_0 \bar{\boldsymbol{\eta}}_0) Q_{\xi_i, \xi_{k_i}}, \\
\mathbf{h}_{200}^{2k_i^*} &= -\frac{1}{2\sqrt{2}} \left(L_{2k_i^*}(\mathbf{h}_{200}) + \sigma_{2k_i^*} \Delta \mathbf{h}_{200} \right)^{-1} Q_{\xi_i, \xi_{k_i}}, \quad \mathbf{h}_{011}^{2k_i^*} = 0, \quad \mathbf{h}_{002}^0 = \overline{\mathbf{h}_{020}^0}, \quad \mathbf{h}_{101}^{k_i^*} = \overline{\mathbf{h}_{110}^{k_i^*}}, \\
\mathbf{h}_{011}^0 &= -\left(L_0(\mathbf{h}_{200}) + \sigma_0 \Delta \mathbf{h}_{200} \right)^{-1} Q_{\xi_0 \bar{\xi}_0} + \frac{1}{i\omega_0} (\xi_0 \boldsymbol{\eta}_0 - \bar{\xi}_0 \bar{\boldsymbol{\eta}}_0) Q_{\xi_0 \bar{\xi}_0}, \\
\mathbf{h}_{020}^0 &= \frac{1}{2} \left(2i\omega_0 I - \left(L_0(\mathbf{h}_{200}) + \sigma_0 \Delta \mathbf{h}_{200} \right) \right)^{-1} Q_{\xi_0 \bar{\xi}_0} - \frac{1}{2i\omega_0} \left(\xi_0 \boldsymbol{\eta}_0 + \frac{1}{3} \bar{\xi}_0 \bar{\boldsymbol{\eta}}_0 \right) Q_{\xi_0 \bar{\xi}_0}, \\
\mathbf{h}_{110}^{k_i^*} &= \left(i\omega_0 I - \left(L_{k_i^*}(\mathbf{h}_{200}) + \sigma_{k_i^*} \Delta \mathbf{h}_{200} \right) \right)^{-1} Q_{\xi_i, \xi_0} - \frac{1}{i\omega_0} \xi_{k_i^*} \boldsymbol{\eta}_{k_i^*} Q_{\xi_i, \xi_0}.
\end{aligned}$$

接下来,我们将规范型(9)转化为极坐标形式. 首先,通过变量替换 $z_1 = m_1, z_2 = m_2 - im_3, \bar{z}_2 = m_2 + im_3$, 将规范型(9)转化为关于实坐标 $m = (m_1, m_2, m_3)$ 的形式. 其次,令 $m_1 = r, m_2 = \rho \cos \theta, m_3 = \rho \sin \theta$, 则规范型(9)可转化为如下极坐标形式

$$\begin{cases} \dot{r} = \bar{\alpha}_1(\alpha) r + a_{300} r^3 + a_{111} \rho^2, \\ \dot{\rho} = \bar{\mathbf{b}}_2(\alpha) \rho + \bar{b}_{210} r^2 \rho + \bar{b}_{021} \rho^3, \end{cases} \quad (10)$$

其中

$$\bar{\alpha}_1(\alpha) = \operatorname{Re}(\alpha_1(\alpha)), \quad \bar{\mathbf{b}}_2(\alpha) = \operatorname{Re}(\mathbf{b}_2(\alpha)), \quad \bar{b}_{210} = \operatorname{Re}(b_{210}), \quad \bar{b}_{021} = \operatorname{Re}(b_{021}).$$

模型(3)在正平衡点 U_1^* 处产生的模- $(k_2^*, 0)$ Turing-Hopf 分支的规范型可通过类似的方法推导得到.

2 时空斑图

本节利用数值结果展示模型(3)在 Turing-Hopf 分支点 $(\sigma_{k_1}^*, a_0)$ 附近产生的时空斑图.

取 $b = 0.09, c = 1.7, \sigma_2 = 0.01$ (数据来源于 Baurmann et al. (2004)), 则模型(3)存在正平衡点 $U_1^* = (0.5303, 1.1697)$. 由 1.1 节的分析可知,模型(3)在平面 σ_1 - a 内的模-0 Hopf 分支曲线和模- k Turing 分支曲线分别为

$$\mathcal{A}_0: a = a_0 = 10.0169, \quad \mathcal{L}_k: a = a_k(\sigma_1) = \frac{0.62k^4 + 126k^2}{0.09k^2 - 19.12} \sigma_1, \quad k > 14.$$

简单计算可得 $k_0^* = 14, \lfloor \sqrt{x^*} \rfloor = 21 > k_0^*, \sigma_{\lfloor \sqrt{x^*} \rfloor}^* = 0.00128, \sigma_{\lfloor \sqrt{x^*} \rfloor + 1}^* = 0.0013$, 这意味着 $k_1^* = \lfloor \sqrt{x^*} \rfloor + 1 = 22$.

因此,模型(3)的 Turing-Hopf 分支点为 $(\sigma_{k_1}^*, a_0) = (\sigma_{22}^*, a_0) = (0.0013, 10.0169)$. 图 1 绘制了曲线 $\mathcal{A}_0, \mathcal{L}_{15}, \mathcal{L}_{21}, \mathcal{L}_{22}$, Turing-Hopf 分支点 TH, 以及模型(3)的稳定区域, 其中 $\mathcal{L}_{15}$ 为 $a_k(\sigma_1) > 0$ 的临界曲线.

根据 1.2 节的推导过程及形式(10)可得,模型(3)的 Turing-Hopf 分支的规范型如下

$$\begin{cases} \dot{r} = (0.0640\alpha_2 - 493.3413\alpha_1)r + 1.9203r^3 + 14.2066\rho^2r, \\ \dot{\rho} = 0.0362\alpha_2\rho - 3.5825\rho r^2 + 2.2357\rho^3. \end{cases} \quad (11)$$

注意到, $\rho > 0$ 且 r 为任意实数. 直接计算可得,对任意 α_1, α_2 , 模型(11)都存在平凡平衡点 $E_0 = (0, 0)$; 当 $\alpha_2 < 7714.97\alpha_1$ 时, 模型(11)存在两个半平凡平衡点 $E_1^\pm = \left(\pm \sqrt{256.9085\alpha_1 - 0.0333\alpha_2}, 0 \right)$; 当 $\alpha_2 < 0$ 时, 模型(11)存在半平凡平衡点 $E_2 = \left(0, \sqrt{-0.0162\alpha_2} \right)$; 当 $\alpha_2 > -2939.0294\alpha_1$ 且 $\alpha_2 < 5930.5185\alpha_1$ 时, 模型(11)存在两个正平衡点

$$E_3^\pm = \left(\pm \sqrt{19.9854\alpha_1 + 0.0068\alpha_2}, \sqrt{32.0248\alpha_1 - 0.0054\alpha_2} \right).$$

从而,平面 α_1 - α_2 内的临界分支曲线可表示为

$$\mathcal{A}: \alpha_2 = 0, \quad \Gamma: \alpha_2 = 7714.97\alpha_1, \quad \Gamma_1: \alpha_2 = -2939.0294\alpha_1, \quad \Gamma_2: \alpha_2 = 5930.5185\alpha_1, \quad \alpha_1 \geq 0.$$

进一步,将平面 α_1 - α_2 的坐标原点平移至点 $(\sigma_{22}^*, a_0) = (0.0013, 10.0169)$ 后可得,该平面内的临界分支曲线与平面 α_1 - a 内的分支曲线完全一致. 为了方便,我们仍沿用符号 $\mathcal{A}, \Gamma, \Gamma_1$ 和 Γ_2 对其进行标记, 其中

$$\mathcal{A}: a = 10.0169, \quad \Gamma: a = 7714.97(\sigma_1 - 0.0013) + 10.0169, \quad \sigma_1 \geq 0,$$

$$\Gamma_1: a = -2939.0294(\sigma_1 - 0.0013) + 10.0169, \quad \sigma_1 \geq 0.0013,$$

$$\Gamma_2: a = 5930.5185(\sigma_1 - 0.0013) + 10.0169, \quad \sigma_1 \geq 0.0013.$$

其几何图形如图2所示. 从图2中, 我们观察到这些曲线将平面 σ_1 - a 划分为6个区域, 分别记为 $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2, \mathcal{R}_3, \mathcal{R}_4, \mathcal{R}_5, \mathcal{R}_6$. 需要说明的是, 模型(11)的平凡平衡点 E_0 对应原模型(3)的常数平衡点 U_1^* , r 轴上的平衡点 E_1^* 对应模型(3)的平衡态解, ρ 轴上的平衡点 E_2 对应模型(3)的空间齐次周期解, 正平衡点 E_3^* 对应模型(3)的空间非齐次周期解. 接下来通过如下命题总结参数取遍 $\mathcal{R}_1$ - $\mathcal{R}_6$ 各区域时模型(3)的动力学行为.

命题1 假设 $b = 0.09, c = 1.7, \sigma_2 = 0.01$, 则当 (σ_1, a) 充分接近 Turing-Hopf 分支点 (σ_{22}^*, a_0) 时, 模型(3)在区域 $\mathcal{R}_i, i = 1, 2, \dots, 6$ 内的动力学行为如下:

- (i) 当 $(\sigma_1, a) \in \mathcal{R}_1$ 时, U_1^* 是渐近稳定性的;
- (ii) 当 $(\sigma_1, a) \in \mathcal{R}_2$ 时, U_1^* 是不稳定的, 且模型(3)存在一个稳定的空间非齐次平衡态解;
- (iii) 当 $(\sigma_1, a) \in \mathcal{R}_3$ 时, U_1^* 是不稳定的, 且模型(3)存在一对稳定的空间非齐次周期解和一对不稳定的空间非齐次平衡态解;
- (iv) 当 $(\sigma_1, a) \in \mathcal{R}_4$ 时, U_1^* 是不稳定的, 且模型(3)存在一对不稳定的空间非齐次周期解, 一对不稳定的空间齐次周期解, 和一对稳定的空间非齐次平衡态解;
- (v) 当 $(\sigma_1, a) \in \mathcal{R}_5$ 时, U_1^* 是不稳定的, 且模型(3)存在一对稳定的空间非齐次平衡态解;
- (vi) 当 $(\sigma_1, a) \in \mathcal{R}_6$ 时, U_1^* 是不稳定的, 且模型(3)存在一对稳定的空间齐次周期解.

注2 图1~2和命题1意味着在一定的参数值下, 模型(3)可以产生时空斑图. 生物学上, 该结果说明沉积物内细菌与营养物通过扩散、种间反馈发生自组织分化, 一方面形成菌群与营养物质的空间斑块、层状分布, 体现底栖微生境与生态位的空间分异; 另一方面使菌群丰度、物质代谢呈现周期性时间振荡, 反映微生物增殖、分解过程的动态节律, 真实刻画了沉积物中细菌-营养物耦合演化的复杂生态特征.

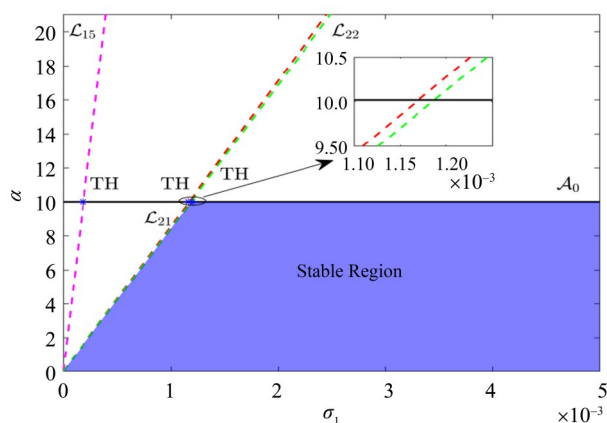


图1 正平衡态解 U_1^* 在平面 σ_1 - a 中的稳定区域

Fig. 1 Stable region for the positive equilibrium

U_1^* in σ_1 - a plane

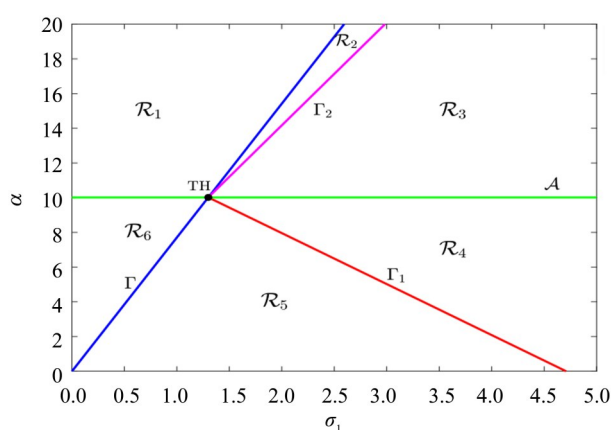


图2 U_1^* 在 Turing-Hopf 分支点 TH 附近的分支相图

Fig. 2 Bifurcation diagram of U_1^* near the

Turing-Hopf bifurcation point TH

3 结 论

本文考虑了一类带有扩散项的最简沉积物模型, 并在 Baumann et al.(2004)和 Cao et al.(2019a; 2019b)的基础上研究了模型的 Turing-Hopf 分支现象与时空斑图. 首先得到了在一定条件下, 模型在正平衡点 U_1^* 处会发生 Turing-Hopf 分支现象. 生物学上, 该结果解释了海洋沉积物中细菌与营养物质的动态时空异质性; 其次给出了模型在 Turing-Hopf 分支点处的规范型; 最后利用数值结果得到了在 Turing-Hopf 分支点附近, 模型呈现出丰富的时空动力学行为, 包括空间齐次周期解、空间非齐次周期解以及空间非齐次平衡态解. 生物学上, 该结果不仅说明沉积物内细菌与营养物通过扩散、种间反馈发生自组织分化, 还真实体现了底栖微生

境与生态位的空间分异,同时,还真实刻画了沉积物中细菌-营养物耦合演化的复杂生态特征.

参考文献:

- 李海侠, 2017. 一类扩散食物链模型正解的多重性和唯一性[J]. 中山大学学报(自然科学版), 56(5): 51–59.
- 罗丽琴, 李海侠, 吴绍艳, 2025. 一类具有交错扩散和捕获项的捕食-食饵模型的稳态解[J]. 中山大学学报(自然科学版中英文), 64(4): 134–146.
- 王晶晶, 贾云锋, 2017. 一类具有交叉扩散的捕食-食饵模型的共存性[J]. 中山大学学报(自然科学版), 56(6): 55–59.
- Baumann M, Feudel U, 2004. Turing patterns in a simple model of a nutrient-microorganism system in the sediment[J]. *Ecol Complex*, 1(1): 77–94.
- Cao Q, Wu J H, 2019a. Patterns and dynamics in the diffusive model of a nutrientmicroorganism system in the sediment[J]. *Non-linear Anal Real World Appl*, 49: 331–354.
- Cao Q, Wu J H, Wang Y E, 2019b. Bifurcation solutions in the diffusive minimal sediment[J]. *Comput Math Appl*, 77(3): 888–906.
- Jia Y F, 2018. Computational analysis on Hopf bifurcation and stability for a consumer-resource model with nonlinear functional response[J]. *Nonlinear Dyn*, 94: 185–195.
- Jia Y F, Wang J J, 2025. Effects of extra resource and harvesting on the pattern formation for a predation system[J]. *Commun Non-linear Sci Numer Simul*, 140: 108381.
- Jiang W H, An Q, Shi J P, 2020. Formulation of the normal form of Turing-Hopf bifurcation in partial functional differential equations[J]. *J Differ Equ*, 268(10): 6067–6102.
- Kovács S, 2004. Turing bifurcation in a system with cross diffusion[J]. *Nonlinear Anal*, 59(4): 567–581.
- Song Y L, Zhang T H, Peng Y H, 2016. Turing-Hopf bifurcation in the reaction-diffusion equations and its applications[J]. *Commun Nonlinear Sci Numer Simul*, 33: 229–258.
- Wang J J, Jia Y F, Shi M J, 2024. Existence and Turing instability of positive solutions for a predator-pest model with additional food[J]. *Appl Math Lett*, 157: 109191.
- Wang J J, Zheng H C, Jia Y F, 2021. Dynamical analysis on a bacteria-phages model with delay and diffusion[J]. *Chaos Solitons Fractals*, 143: 110597.
- Wu H, Song B, Zhang L, et al, 2026. Turing-Hopf bifurcation and inhomogeneous pattern for a reaction-diffusion SIR epidemic model with chemotaxis and delay[J]. *Math Comput Simul*, 240: 1000–1022.
- Xing Y, Jiang W H, 2024. Turing-Hopf bifurcation and bi-stable spatiotemporal periodic orbits in a delayed predator-prey model with predator-taxis[J]. *J Math Anal Appl*, 533(1): 127994.
- Xu X F, Wei J J, 2018. Turing-Hopf bifurcation of a class of modified Leslie-Gower model with diffusion[J]. *Discrete Contin Dyn Syst B*, 23(2): 765–783.
- Yi F Q, Gaffney E A, Seirin-Lee S, 2017. The bifurcation analysis of Turing pattern formation induced by delay and diffusion in the Schnakenberg system[J]. *Discrete Contin Dyn Syst B*, 22(2): 647–668.

(责任编辑 冯兆永)